

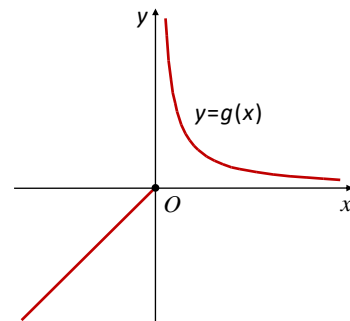
ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη θεωρήματος σελ. 99 σχολικού βιβλίου.

A2. **α. Ψευδής**
β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$$

η οποία έχει γραφική παράσταση (σχήμα σχολικού βιβλίου σελ.35):



Η $g(x)$ είναι συνάρτηση 1-1 στο $A_g = \mathbb{R}$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα.

A3. Διατύπωση θεωρήματος σελ. 216 σχολικού βιβλίου.

A4. **α. Λάθος** (σελ. 33 σχ. βιβλίου)
β. Λάθος (σχόλιο σελ. 136 σχ. βιβλίου)
γ. Σωστό (τύπος σελ. 53 σχ. βιβλίου)
δ. Σωστό (σελ. 37 σχ. βιβλίου)
ε. Σωστό (σελ. 17 σχ. βιβλίου)

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$A_1 = (-\infty, 0), A_2 = (0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

Για να βρούμε το πρόσημο της f' θα βρούμε το πρόσημο του $\frac{x^3+8}{x^3}$ με βάση το παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x^3+8	-	○	+	+
x^3	-		○	+
$x^3 \cdot (x^3+8)$	+			+

Άρα το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	+
$f(x)$	↗		↘	↗

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$

Στην θέση $x_0 = -2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2) = -3$

B2. Η $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$A_1 = (-\infty, 0), A_2 = (0, +\infty)$ με παράγωγο :

$$f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

B3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη θα αναζητήσουμε στο $x = 0$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x^3 - 4) \cdot \frac{1}{x^2} \right] = -\infty$$

Διότι : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 4) = -4$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x^3 - 4) \cdot \frac{1}{x^2} \right] = (-4) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Διότι : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 4) = -4$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (ο άξονας $y'y$) κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .

Πλάγιες –Οριζόντιες θα αναζητήσουμε στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Για να είναι η $y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αρκεί

τα όρια $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί

(αντιστοίχως $\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x]$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

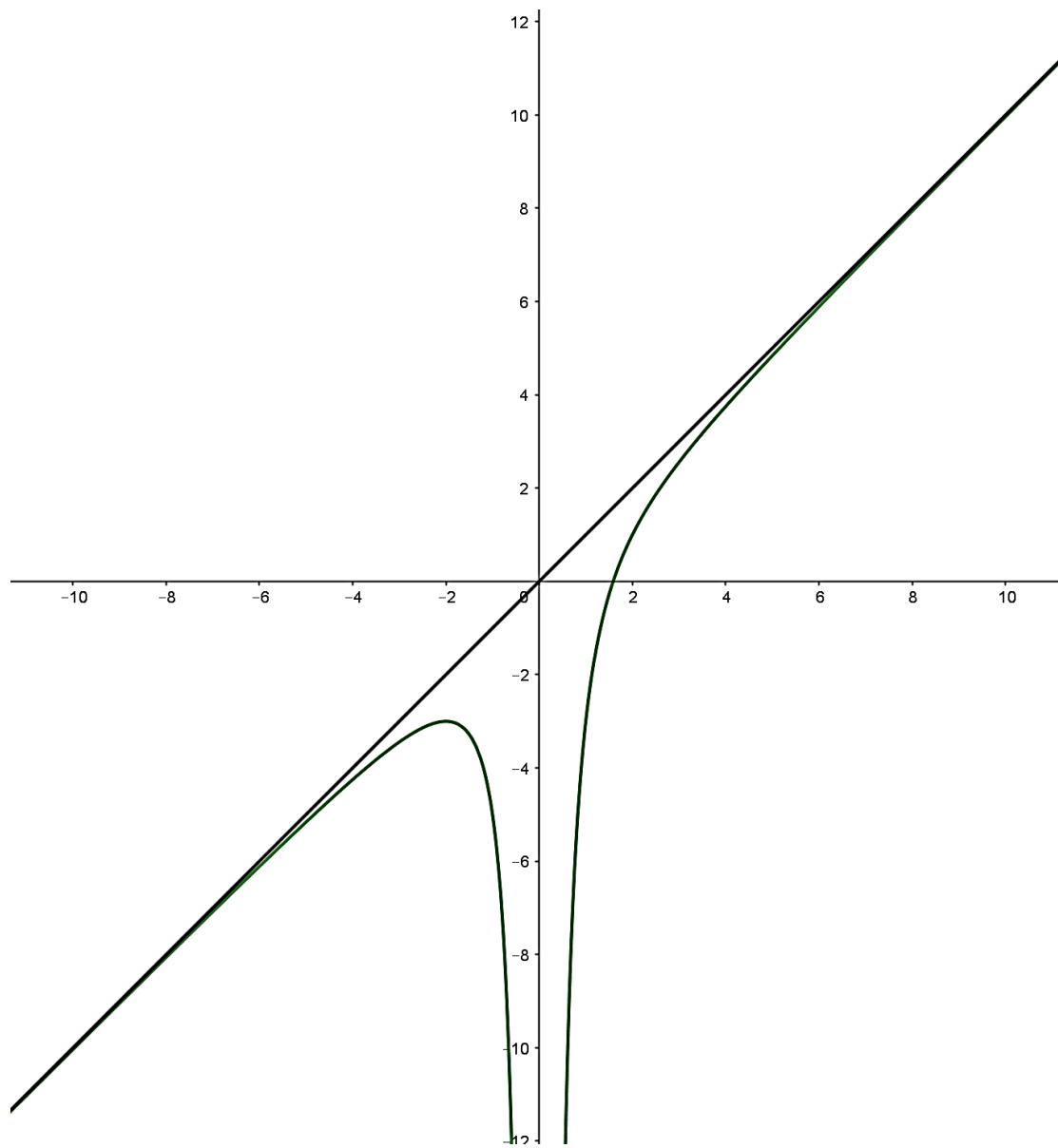
Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

B4. Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω :



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου θα έχει μήκος $\frac{x}{4}$ m

$$\text{Άρα, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι : } E_{\tau} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} \text{ m}^2 .$$

Το μήκος του κύκλου θα είναι $L = (8-x)$ m και επειδή $L = 2\pi r$, ο κύκλος θα έχει ακτίνα $r = \frac{8-x}{2\pi}$ m, επομένως το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με :

$$E_{\kappa} = \pi \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi} \text{ m}^2$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \text{ με } 0 < x < 8$$



Γ2.

Η $E(x)$ είναι συνεχής ως πολωνυμική στο $(0,8)$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με:

$$E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi}$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{32}{\pi+4}$$

Το πρόσημο της $E'(x)$ και η μονοτονία της $E(x)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$		-	+
$E(x)$			

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων γίνεται ελάχιστο για $x = \frac{32}{\pi+4}$,

Όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι $x = \frac{32}{\pi+4}$ τότε

$$\text{διάμετρος} = 2\rho = 2 \frac{8-x}{2\pi} = \frac{8-x}{\pi} = \frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{32}{\pi+4}$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου

Γ3.

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 8)$.

Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ οπότε

$$E(\Delta_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0} E(x) \right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi} \right)$$

Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ οπότε

$$E(\Delta_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) \right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4 \right)$$

Αφού το $5 \in E(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο Δ_1 , η οποία είναι μοναδική αφού $E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 .

Τέλος το $5 \notin E(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $E(x) = 5$ είναι αδύνατη στο Δ_2 .

ΘΕΜΑ Δ



Δ1.

Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$ και $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

Επομένως

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow x - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \alpha$$

Άρα :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	\circ	$+$
$f(x)$			

Στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ η f κοίλη ενώ στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ η f κυρτή.

Το σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδή $M(\alpha, 2 - \alpha^2)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f

Δ2.

- Εφόσον η f'' κοίλη στο $A_1 = (-\infty, \alpha]$ άρα η f' γνησίως φθίνουσα σε αυτό .

Επειδή η f' συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, \alpha]$ το σύνολο τιμών της θα είναι :

$$f'(A_1) = \left[f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \right) = [2 - 2\alpha, +\infty)$$

διότι :

$$f'(\alpha) = 2e^{\alpha-\alpha} - 2\alpha = 2 - 2\alpha = 2(1 - \alpha) < 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{e^\alpha} e^x - 2x \right) = +\infty$$

Το $0 \in f'(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in A_1$ ώστε $f'(x_1) = 0$,το x_1 μοναδικό διότι η f' γνησίως φθίνουσα στο A_1

- Εφόσον η f'' κυρτή στο $A_2 = [\alpha, +\infty)$ άρα η f' γνησίως αύξουσα σε αυτό .

Επειδή η f' συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [\alpha, +\infty)$ το σύνολο τιμών της θα είναι :

$$f'(A_2) = \left[f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = [2 - 2\alpha, +\infty)$$

$$\text{διότι : } f'(\alpha) = 2e^{\alpha-\alpha} - 2\alpha = 2 - 2\alpha$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^\alpha} e^x - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{2}{e^\alpha} \frac{e^x}{x} - 2 \right) \right] = +\infty$$

Σημειώνουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Το $0 \in f'(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in A_2$ ώστε $f'(x_2) = 0$, το x_2 μοναδικό διότι η f' γνησίως φθίνουσα στο A_2

Στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα και έχει μοναδική ρίζα την $x = x_1$ οπότε το πρόσημό της είναι :





Για $x < x_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για $x_1 < x < \alpha$ τότε $f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα και έχει μοναδική ρίζα την $x = x_2$ οπότε το πρόσημό της είναι :

Αν $\alpha < x < x_2$ τότε $f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Αν $x > x_2$ τότε $f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
f'(x)	+	-	-	+	
f(x)					

Άρα η f παρουσιάζει στην θέση $x = x_1$ τοπικό μέγιστο και στην θέση $x = x_2$ τοπικό ελάχιστο

Δ3.

Θα δείξουμε ότι ο αριθμός 1 βρίσκεται στο διάστημα (x_1, α)

Αποκλείεται να βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ διότι από υπόθεση $\alpha > 1$

Έστω $1 \leq x_1$ επειδή η f' γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_1]$ ισχύει

$$f'(1) \geq f'(x_1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow 1-\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα ο αριθμός 1 βρίσκεται στο διάστημα (x_1, α)

Επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο (x_1, x_2) άρα και στο διάστημα $(\alpha, x_2) \subseteq (x_1, x_2)$

η εξίσωση $f(x) = f(1)$ ισοδυναμεί με την $x = 1$ (η $f(1) = f(1)$) η οποία ως λύση

απορρίπτεται διότι $x \in (\alpha, x_2)$ με $\alpha > 1$ άρα και $x > 1$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α, x_2)

Δ4

$$\text{Για } \alpha = 2: f(x) = 2e^{x-2} - x^2 \text{ και } f'(x) = 2e^{x-2} - 2x.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 2$ είναι η

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y + 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 2$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης βρίσκεται κάτω

από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $f(x) \geq y \Rightarrow f(x) \geq -2x + 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$.

$$\text{Άρα για } x \geq 2 \text{ είναι } f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2) \sqrt{x-2}.$$

Αφού οι συναρτήσεις $f(x) \cdot \sqrt{x-2}$ και $(-2x + 2) \sqrt{x-2}$ είναι συνεχείς στο $[2, +\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$, τότε

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} dx > \int_2^3 (-2x + 2) \sqrt{x-2} dx.$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_2^3 (-2x + 2) \sqrt{x-2} dx$

θέτω $\sqrt{x-2} = u \Leftrightarrow x-2 = u^2$ τότε $dx = 2udu$ και

- για $x = 2$ είναι $u = 0$,
- για $x = 3$ είναι $u = 1$.

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_2^3 (-2x + 2) \sqrt{x - 2} dx &= \int_0^1 [-2(u^2 + 2) + 2] u \cdot 2u du = \int_0^1 (-2u^2 - 2) 2u^2 du = \\ &= \int_0^1 (-4u^4 - 4u^2) du = \left[-4 \cdot \frac{u^5}{5} - 4 \cdot \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{15} - \frac{20}{15} = -\frac{32}{15} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x - 2} dx > -\frac{32}{15}.$$