ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Παρασκευή 9 Ιουνίου 2017

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη ,σχολικό σελ. 135 (καινούργιο βιβλίο)

σελ. 253 (παλιό βιβλίο)

Α2. α. Ψευδές

β. η $f(x)=|x|$ η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αλλά είναι συνεχής στο 0.

Α3. Ορισμός ,σχολικό σελ. 73 (καινούργιο βιβλίο)

σελ. 191 (παλιό βιβλίο)

Α4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1. Είναι : $f(x)=\ln x$ με $A_f=(0,+\infty)$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ με $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$.

Η συνάρτηση $h=g\circ f$ ορίζεται αν και μόνο αν το σύνολο $A_h=\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}\neq\varnothing$.

Όμως $A_h=\left\{x\neq 1 \text{ και } \dfrac{x}{1-x}>0\right\}=\{x\neq 1 \text{ και } x(1-x)>0\}=\{x\neq 1 \text{ και } 0<x<1\}=(0,1)\neq\varnothing$,

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x}{1-x}\right)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Τηλ:2102775360 www.methodikal.gr – e-mail:contact@methodikal.gr
Ανδρέου Δημητρίου 81 & Ακριτών 26 -ΚΑΛΟΓΡΕΖΑ

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1)=h(x_2)$ τότε έχουμε

$$h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \Rightarrow \frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2}$$

$$\Rightarrow x_1(1-x_2)=x_2(1-x_1) \Rightarrow x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2 \Rightarrow x_1=x_2.$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι 1 – 1, άρα αντιστρέφεται.

Είναι

$$h(x)=y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y(1-x)=x$$

$$\Leftrightarrow e^y-xe^y=x \Leftrightarrow (1+e^y)x=e^y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}.$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι η

$$h^{-1}(x):\mathbb{R}\to(0,1), \text{με}\, h^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}.$$

Β3. Η συνάρτηση $\phi(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $\phi'(x)=\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)'=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$,

οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Επίσης η συνάρτηση $\phi'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}, x\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη με

$$\phi''(x)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)-2e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

Είναι :

$1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$

$1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x<e^0 \Leftrightarrow x<0$

$1-e^x<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$					

Οπότε η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$,ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$

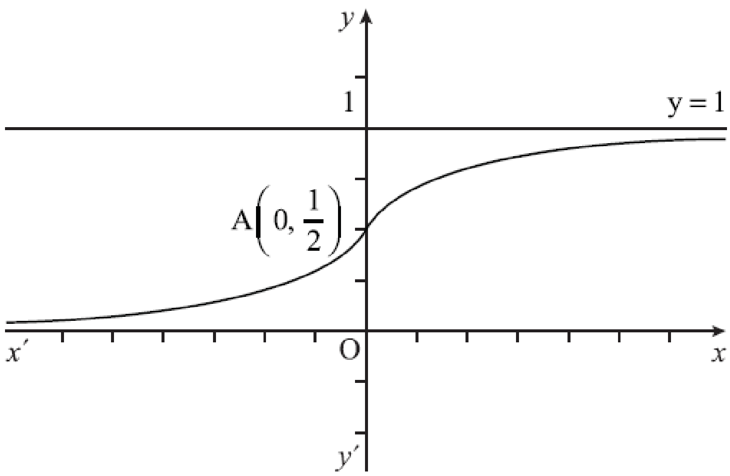
B4. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = 0$.

Οπότε η $\varepsilon_1 : y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H.}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$.

Οπότε η $\varepsilon_2 : y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω για την γραφική παράσταση θα έχουμε :



Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη οπότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in [0,\pi]$, η οποία έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

δηλαδή:

$$y + ημx_0 = -συνx_0(x - x_0).$$

Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, άρα:

$$-\frac{\pi}{2} + ημx_0 = -συνx_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow 2ημx_0 - 2x_0συνx_0 + \piσυνx_0 - \pi = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = 2ημx - 2xσυνx - \piσυνx - \pi$, με $x \in [0,\pi]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών, στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με:

$$g'(x) = \left(2ημx - 2xσυνx - \piσυνx - \pi\right)' = 2συνx - 2συνx + 2xημx - \piημx = 2xημx - \piημx = ημx\left(2x - \pi\right)$$

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, αφού $ημx > 0$, για κάθε $x \in (0,\pi)$.

Επίσης, $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

x	0	$\pi/2$	π
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Οπότε, αφού g συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε:

το σύνολο τιμών της στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι το $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[g\left(\frac{\pi}{2}\right), g(0)\right] = [2 - \pi, 0]$

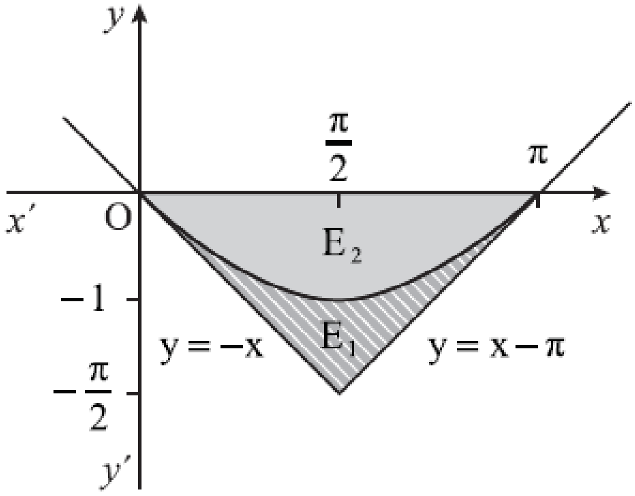
και αφού g συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, τότε:

το σύνολο τιμών της στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ είναι το $g\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = \left[g\left(\frac{\pi}{2}\right), g(\pi)\right] = [2 - \pi, 0]$.

Άρα, οι μοναδικές ρίζες της g στο $[0,\pi]$ είναι: $x = 0$ ή $x = \pi$.

Οπότε, αν $x_0 = 0$, τότε: $(\varepsilon_1): y = -x$ και αν $x_0 = \pi$, τότε: $(\varepsilon_2): y = x - \pi$.

Γ2. Έχουμε ότι :



$$E_2=\int_0^{\pi}\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_0^{\pi}\left|-\eta\mu x\right|dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=2\ \tau.\mu.$$

$$E_1=E_{\tau\rho\iota\gamma.}-E_1=\frac{1}{20}\cdot\pi\cdot\left|-\frac{\pi}{2}\right|-2=\frac{\pi^2}{4}-2\ \tau.\mu.$$

Οπότε $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$.

Γ3. Αφού η f είναι κυρτή ,η γραφική παράσταση της είναι πάνω από την εφαπτομένη

$\left(\varepsilon\right): y=x-\pi$ με εξαίρεση το σημείο επαφής $x=\pi$,οπότε $f\left(x\right)\geq x-\pi$,για κάθε

$x\in\left[0,\pi\right]$. Άρα $f\left(x\right)-x-\pi\geq 0$, για κάθε $x\in\left[0,\pi\right]$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f\left(x\right)-x-\pi\right)=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f\left(x\right)+x}{\left(f\left(x\right)-x-\pi\right)}=+\infty$.

Γ4. Η συνάρτηση $\phi(x)=f(x)-x+\pi$ όπως αναφέρθηκε στο Γ3 είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,e]\subseteq[0,\pi]$ και αφού $\phi(e)=-ημe-1+\pi>0$ θα είναι $\phi(x)>0$ στο διάστημα $[1,e]$.

Δηλαδή $f(x)-x+\pi>0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x}>0$ και άρα,

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx-\int_1^e dx+\pi\int_1^e \frac{1}{x}dx>0.$$

Οπότε

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e dx-\pi\int_1^e \frac{1}{x}dx>0 \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>(e-1)-\pi[\ln x]_1^e \quad (1)$$

Αλλά $e-1-\pi[\ln x]_1^e=e-1-\pi(1-0)=e-1-\pi$. Οπότε η (1) δίδει $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$.

Θέμα Δ

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-1,\pi]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ και στο $(0,\pi]$ αφού προκύπτει από σύνθεση συνεχών και από γινόμενο συνεχών αντίστοιχα.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x ημx=e^0 ημ0=0$ και $f(0)=0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ κι έτσι η f είναι συνεχής και στο 0. Άρα τελικά η f είναι συνεχής στο A.

Κρίσιμα σημεία της f (εσωτερικά σημεία του A που η f' δεν υπάρχει είτε μηδενίζεται).

Για $-1\le x<0$ είναι $f(x)=\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{(-x)^4}=(-x)^{4/3}$ και η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)'\overset{x\in(-1,0)}{=}\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}\cdot(-x)'=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0.$$

Για $0<x\le\pi$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(e^x ημx\right)'=e^x ημx+e^x συνx=e^x(ημx+συνx)$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{1/3}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+} e^x\frac{ημx}{x}=1\cdot 1=1$$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

Θα βρούμε τα σημεία που η f' μηδενίζεται.

Αν $-1<x<0$ είναι $f'(x)<0$.

Για $0<x<\pi$ είναι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(ημx+συνx)=0 \Leftrightarrow e^x=0 \text{ ή } ημx=-συνx \underset{συν\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{ημx}{συνx}=-1 \Leftrightarrow εφx=-1 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4},$$

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι το 0 και το $\frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Αν $-1\le x<0$ είναι $f'(x)<0$ και f συνεχής στο 0 άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$.

Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ είναι

$$f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=\sqrt{2}e^x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$=\sqrt{2}e^x\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=\sqrt{2}e^x\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Οπότε για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\Rightarrow\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0\overset{\sqrt{2}e^x>0}{\Rightarrow}f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$.

Ακόμα η f συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$, ενώ για $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)\Rightarrow\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)\Rightarrow\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}e^x>0}{\Rightarrow}f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

Ακόμα η f συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Τελικά η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=1$, τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$, τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$ το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$ και τέλος τοπικό ελάχιστο στο π το $f(\pi)=0$.

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδό είναι το $E=\int_0^\pi|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^\pi e^x\,|\eta\mu x-e^{4x}|\,dx$.

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $\begin{cases}\eta\mu x\le 1\\ e^{4x}\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta\mu x\le 1\\ -e^{4x}\le -1\end{cases}\Rightarrow\eta\mu x-e^{4x}\le 0$.

Άρα τελικά

$$E=\int_0^\pi e^x(e^{4x}-\eta\mu x)dx=\int_0^\pi e^{5x}dx-\int_0^\pi e^x\eta\mu x dx=I_1-I_2,$$

όπου

$$I_1=\int_0^\pi e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi=\frac{e^{5\pi}-1}{5}.$$

$$I_2=\int_0^\pi e^x\eta\mu x dx=\left[e^x\,\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\,\sigma\upsilon\nu x dx=0-\left[e^x\,\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi-I_2,\ \text{άρα}\ I_2=\frac{e^\pi+1}{2}.$$

Άρα τελικά $E=\frac{1}{10}(2e^{5\pi}-5e^{\pi}-7)$τ.μ. .

Δ4. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}e^{3\pi/4} \Leftrightarrow f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \quad (1)$$

Αν ισχύει η (1), τότε $0\le\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\le 0$, αφού $f(x)\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ για κάθε $x\in[-1,\pi]$.

Συνεπώς, $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0$, οπότε $x=\frac{3\pi}{4}$.